Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3 Janvier 2013

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL - PREMIER PARTIEL

I (*9 pts*)

Soit $a > 0$. On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \exp(axy)$ et l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0\}$.

1. **(*1 pts*)** Montrer que $\mathcal{C}$ est en tout point une sous-variété de codimension 1 de $\mathbb{R}^2$.
2. **(*2 pts*)** Montrer que tout point $(x,y) \in \mathcal{C}$ en lequel f restreinte à $\mathcal{C}$ admet un point critique vérifie
$$3y^3 + y = 3x^3 + x.$$
3. **(*2 pts*)** En déduire que l'unique point de $\mathcal{C}$ en lequel f restreinte à $\mathcal{C}$ admet un point critique est le point $(1,1)$.
4. **(*2 pts*)** Montrer que
$$\lim_{\substack{\|(x,y)\| \to +\infty \\ (x,y)\in\mathcal{C}}} f(x,y) = 0.$$
(on pourra pour celà passer en coordonnées polaires $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, et montrer que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont de signes opposés quand $r \to +\infty$ et $(x,y) \in \mathcal{C}$).
5. **(*2 pts*)** En déduire que la fonction f restreinte à $\mathcal{C}$ admet un maximum atteint au point $(1,1)$.

II (*6 pts*)

Résoudre le système différentiel $Y'(t) = AY(t) + B(t)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$.

III (*7 pts*)

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = a(x)\,y + b(x)$, avec $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. **(*1 pt*)** Rappeler pourquoi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution φ_λ de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x_0) = \lambda$.
2. **(*2 pts*)** Ecrire l'équation de la tangente D_λ au graphe de φ_λ au point (x_0, λ).
3. **(*1 pt*)** Montrer que si $a(x_0) = 0$, les droites D_λ sont parallèles.
4. **(*3 pts*)** Montrer qu si $a(x_0) \neq 0$, les droites D_λ sont concourantes en un point (x_0, y_0) que l'on déterminera.