Université de Bourgogne — Novembre 2017
Département de Mathématiques - L3

CALCUL DIFFERENTIEL - CORRIGÉ DU PARTIEL (2 heures)

I (*4 pts*)

1. ***(2 pts)*** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Sa réciproque est-elle également de classe $\mathcal{C}^1$? NON. Par exemple, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Mais sa réciproque, $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$, n'est pas dérivable en 0.
Remarque, dans cette question, il ne suffit pas de se contenter de commentaires généraux, qui se résument à "il n'y a pas de raisons à priori pour lesquelles la réciproque de f devrait être de classe $\mathcal{C}^1$" ! Si l'on pense que la réponse est négative, on donne un exemple (correct) justifiant son point de vue !
Profitons-en pour rappeler que $f\colon x \mapsto x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$!
De plus, si on parle dans l'énoncé de bijection $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on ne donne pas d'exemple de fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ou $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.
2. ***(2 pts)*** Donner un exemple de fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui est un difféomorphisme local en tout point sans être un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Il suffit de mettre en défaut la bijectivité. Par exemple, l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, \mathrm{e}^y)$ n'est pas bijective (aucun élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b < 0$ ne peut avoir d'antécédent par f). Mais f est un difféomorphisme local en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, car la matrice jacobienne $J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$ est inversible.
Mettre en défaut la bijectivité ne signifie pas nécessairement tenter (le plus souvent maladroitement et vainement) de mettre en défaut l'injectivité !
D'autre part des exemples d'applications du type $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto xy$ défient littéralement le sens commun !

II (*6 pts*)

Pour $n \geq 0$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On fixe une matrice inversible $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. ***(3 pts)*** Montrer que l'application $G\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $M_0 \cdot M^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable, et déterminer la différentielle $\mathrm{d}_M f$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a deux méthodes possibles pour montrer que f est différentiable.
   (a) On peut identifier $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'espace $\mathbb{R}^{n^2}$ et dire que les composantes de G sont polynomiales, et donc différentiables.
   (b) On peut utiliser la définition de la différentiabilité. Cette méthode a l'avantage de donner également la différentielle $\mathrm{d}_M G$ en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit donc $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} G(M+H) &= M_0 \cdot (M+H)^2 = M_0 \cdot \left(M^2 + MH + HM + H^2\right) \\ &= M_0 \cdot M^2 + M_0 \cdot (MH + HM) + M_0 H^2 \\ &= G(M) + L(H) + M_0 H^2. \end{aligned}$$

Or, $L\colon H \to L(H) = M_0(MH + HM)$ est une application linéaire, et $M_0 H^2 = o(H)$. Pour montrer ce dernier point, il suffit de munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle $\|\cdot\|$, et d'observer que $\|M_0 H^2\| \leq \|M_0\| \|H\| \|H\| = \|H\| \varepsilon(H)$, où ε est de limite nulle en 0. Ceci prouve que G est différentiable au point M et que

$$\mathrm{d}_M G\colon H \longmapsto M_0 \cdot (MH + HM)$$

Combien de fois faudra-t-il répéter que l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est *pas commutatif* ? Donc l'affirmation $\mathrm{d}_M G(H) = 2M_0MH$ est absolument fausse !

2. ***(3 pts)*** L'application G est-elle un difféomorphisme local en tout point $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? NON. Par exemple, en $M = 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la différentielle $\mathrm{d}_0 G$ est l'application nulle :puisqu'elle n'est pas inversible, il résulte du Théorème d'inversion locale que G n'est pas un difféomorphisme local en ce point.
   Ici, il ne faut pas confondre le fait que l'application $\mathrm{d}_M G$ soit inversible, en tant qu'application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec le fait que $\mathrm{d}_M G(H)$ soit une *matrice inversible*, et donc chercher à évaluer $\det(\mathrm{d}_M G(H))$. Ça n'a rien à voir !

III (*5 pts*)

Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et soit $g = f \circ f$.

1. ***(1 pt)*** Rappeler pourquoi f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$. Il s'agit de deux applications polynomiales.
2. ***(2 pts)*** Calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne $J_{(x,y)}f$, ainsi que la matrice jacobienne $J_{(0,0)}g$. On a :
   $$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}.$$
   Pour calculer $J_{(0,0)}g$, il suffit de d'utiliser le fait que $J_{(0,0)}g = J_{(0,0)}f \times J_{(0,0)}f$. On a donc :
   $$J_{(0,0)}g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   On n'a pas besoin de calculer explicitement g, ni $J_{(x,y)}g$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour calculer $J_{(0,0)}g$!
3. ***(2 pts)*** En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que g admette un unique point fixe dans la boule fermée $\overline{B}_r((0,0))$ de centre $(0,0)$ et de rayon r. Sans calculer g, déterminer ce point fixe. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle $\|\cdot\|$ quelconque. Puisque $\left\|J_{(0,0)}g\right\| = 0$ et que g est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe un réel $r > 0$ tel que $\left\|J_{(x,y)}g\right\| < \frac{1}{2}$ pour tout $(x,y) \in \overline{B}_r((0,0))$. D'après l'inégalité des accroissements finis appliqués à g, on voit que g est une contraction de rapport $\frac{1}{2}$ sur cette boule. Cette boule, étant fermée, est un espace métrique complet (pour la distance induite). On peut donc appliquer le Théorème du point fixe à l'application g, pour conclure que g a un point fixe unique sur cette boule. On voit immédiatement que $(0,0)$ est un point fixe pour f, donc pour g. Il est donc l'unique point fixe de g dans la boule $\overline{B}_r((0,0))$.
   Cette question fait appel à deux théorèmes : l'inégalité des accroissements finis et le Théorème du point fixe. Il convient donc de mentionner convenablement ces deux énoncés, et d'expliquer proprement pourquoi on peut les appliquer.

IV *(5 pts)*

On définit $f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}.$$

1. ***(2 pts)*** Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, encore notée f. La forme de la fonction suggère de passer en coordonnées polaires. En posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, l'expression devient :

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{r^{3/2}} = r^{\frac{1}{2}}\cos^2\theta,$$

qui est de limite nulle quand $r \to 0$, c'est à dire quand $(x, y) \to (0, 0)$. On peut prolonger f par continuité en posant $f(0, 0) = 0$.

2. ***(2 pts)*** Etudier l'existence de dérivées directionnelles à l'origine pour cette fonction. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a :

$$\frac{f((0,0) + t(x,y)) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tx, ty)}{t} = \frac{tx^2}{t^{3/2}(x^2+y^2)^{3/4}} = t^{-\frac{1}{2}}\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/3}}.$$

Cette quantité n'a de limite finie quand t tend vers 0 que si $x = 0$. Donc f n'admet de dérivée directionnelle que dans la direction des vecteurs de l'axe Oy.
Une bonne fois pour toutes, *dérivée directionnelle* n'est pas la même chose que *dérivée partielle* (voir le cours). Se contenter pour cette question de s'intéresser aux deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est donc y répondre, si l'on ose dire, très partiellement !

3. ***(1 pt)*** La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$? Puisque f n'admet pas de dérivée directionnelle dans toute les directions, elle ne peut pas être différentiable à l'origine.