Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Novembre 2016

CORRIGÉ du PARTIEL de CALCUL DIFFERENTIEL

Commentaire préliminaire. Le fait qu'une épreuve se déroule en temps limité n'autorise pas à rendre un torchon à peine lisible en guise de travail. De même, ça ne dispense pas d'écrire des phrases articulées (sans être interminables) présentant les calculs où raisonnements effectués. Ces considérations ont bien sûr influé sur les notes.

I

2. Il y a plusieurs réponses possibles.

a) Considérons un espace métrique complet (E, d) et une contraction $f: E \to E$. D'après le théorème du point fixe, f admet un unique point fixe $a \in E$. Considérons maintenant l'espace $E_1 = E \setminus \{a\}$ muni de la distance induite, et la restriction $f|_{E_1}$ de f à E_1. Cette restriction est toujours une contraction. L'espace métrique E_1 n'est pas complet. En effet, s'il l'était, l'application $f|_{E_1}$ aurait un point un point fixe $b \in E_1$ d'après le même théorème, ce qui impliquerait que f admet les deux points fixes a et b dans E. Pour la même raison, $f|_{E_1}$ est une contraction sur E_1 qui n'admet pas de point fixe.

Remarquons qu'il n'est pas toujours vrai qu'un espace métrique complet privé d'un de ses points cesse d'être complet pour la distance induite. Par exemple $E = [0, 1] \cup \{2\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc il est complet (pour la distance usuelle). Mais $E_1 = E \setminus \{2\} = [0, 1]$ est également complet pour la même raison.

b) On peut également donner un exemple plus explicite. Par exemple l'application $f: x \mapsto \frac{x}{2}$ est une contraction sur $E =]0, +\infty[$ qui n'admet aucun point fixe.

3. Essentiellement, si on omet l'hypothèse que f est une contraction, il y a une énorme latitude pour contredire la conclusion du théorème du point fixe, même si l'espace est complet. Il suffit de produire un exemple de fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui a plusieurs points fixes, ou n'en a aucun (c'est à dire que son graphe n'intersecte pas la diagonale principale). Dans ce cas, f *ne peut pas être une contraction*, à cause du théorème du point fixe. Voici deux exemples :

1. $f : x \mapsto x$ a une infinité de points fixes.
2. $g: x \mapsto x + 1$ n'a aucun point fixe.

Attention, dans les exemples produits, il faut bien s'assurer que $f(E) \subseteq E$!

II

Dans cet exercice, toute réponse du style "f est différentiable car c'est une intégrale de polynôme" ne peut être acceptée. De même, toute preuve de l'existence d'un terme de la forme $o(H)$ utilisant une norme, et évoquant au besoin l'inégalité de Cauchy-Schwarz, *sans préciser clairement de quelle norme il s'agit*, ne peut être acceptée. Le fait que toutes les normes soient équivalentes sur un espace de dimension finie permet de travailler avec la norme de son choix, *mais ne dispense pas de mentionner celle on a choisie.* Enfin aucune mention d'une éventuelle "norme matricielle" sur l'espace E, *qui n'est pas un espace de matrices*, n'est évidemment acceptable.

Dans le même esprit, toute phrase vague évoquant une éventuelle "composition d'applications différentiables", dans dire clairement lesquelles, et pourquoi elles sont différentiables, est inacceptable. Ce type d'argument n'est possible que s'il est démontré proprement.

Enfin, une fois qu'on a fixé un élément H, il est fixé. Donc on ne le fait pas "tendre vers 0" sans un minimum de rédaction appropriée.

Voici donc une solution possible.

Soient $P \in E$ et $H \in E$. On a

$$\begin{aligned} f(P+H) &= \int_0^1 (P(t)+H(t))^3 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 P(t)^3 \,\mathrm{d}t + 3\int_0^1 P(t)^2 H(t) \,\mathrm{d}t + 3\int_0^1 P(t) H(t)^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 H(t)^3 \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Désignons par $\|\cdot\|$ la *norme infinie* sur $[0,1]$, c'est à dire $\|Q\| = \sup_{t\in[0,1]} |Q(t)|$ pour tout $Q \in E$. On note qu'il s'agit bien d'une norme. En particulier si la norme d'un polynôme est nulle, ce dernier s'annule sur $[0,1]$, donc ce dernier est identiquement nul. On a :

$$\begin{aligned} \left|3\int_0^1 P(t) H(t)^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 H(t)^3 \,\mathrm{d}t\right| &\leq 3\int_0^1 |P(t)| \, |H(t)|^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 |H(t)|^3 \,\mathrm{d}t \\ &\leq 3\int_0^1 \|P\| \, \|H\|^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \|H\|^3 \,\mathrm{d}t \\ &= \|H\| \left(3\|P\| \, \|H\| + \|H\|^2\right). \end{aligned}$$

Or la fonction $\varepsilon \colon E \to \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon(R) = 3\|P\| \, \|R\| + \|R\|^2$ pour $R \in E$ est de limite nulle à l'origine. Donc on a démontré que

$$3\int_0^1 P(t) H(t)^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 H(t)^3 \,\mathrm{d}t = o(H).$$

Enfin l'application $L \colon E \to \mathbb{R}$ définie par $L : H \mapsto 3\int_0^1 P(t)^2 H(t) \,\mathrm{d}t$ est clairement linéaire. On a ainsi bien démontré que

$$f(P+H) = f(P) + L(H) + o(H),$$

et donc que f est différentiable en tout $P \in E$, avec $\mathrm{d}_P f \colon H \mapsto 3\int_0^1 P(t)^2 H(t) \,\mathrm{d}t$.

Remarque. Dans une rédaction, il est essentiel de distinguer les points majeurs des points secondaires, voire évidents. Le rédacteur doit donc comprendre par lui-même que c'est dans la description du $o(H)$ qu'il doit détailler sa rédaction, et pas sur le fait que $H \mapsto \int_0^1 P(t)^2 H(t) \, dt$ est linéaire, car ce n'est qu'un exercice d'écriture automatique.

D'autre part, le choix de la norme infinie s'impose presque naturellement dans l'exercice. Il rend les majorations évidentes, sans avoir recours à des inégalités du type Cauchy-Schwarz ou Minkowski.

III

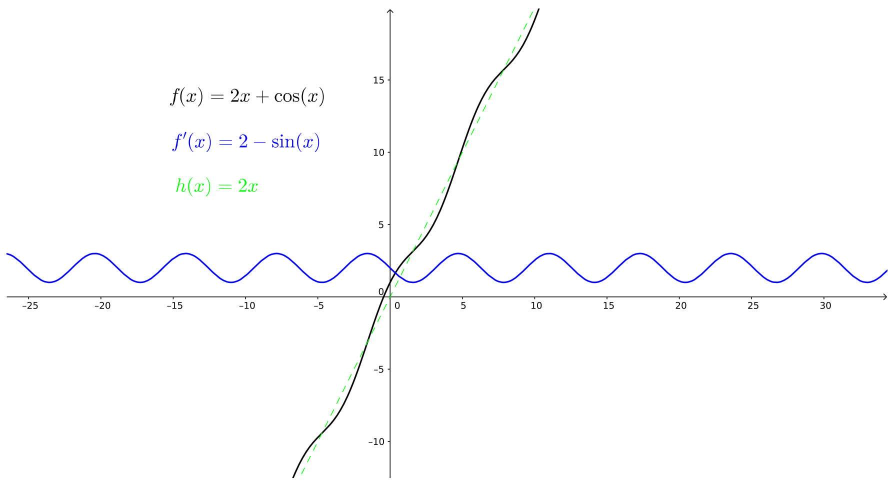
1. Il est toujours recommandé de lire intégralement un énoncé avant de procéder à la résolution d'un exercice. Dans le cas présent, la conclusion de l'exercice, sous l'hypothèse initiale sur la fonction f, est que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même. Donc tout exemple qui n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même est évidemment à rejeter.

Un exemple simple d'application f non linéaire est $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x+1$, qui satisfait naturellement la condition requise (inutile au passage de consacrer du temps et plusieurs lignes à démontrer que $x \mapsto x+1$ n'est pas une application linéaire, nous sommes en troisième année de Licence de Mathématiques).

Mais c'est un exemple assez “Bac-1”. Afin de produire un exemple plus intéressant, on peut se souvenir de l'égalité des accroissements finis qui permet de contrôler, pour une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$, la différence $f(x) - f(y)$ à l'aide de la dérivée en un point de l'intervalle $]x,y[$. Il suffit donc de trouver une fonction (non linéaire) minorée (en valeur absolue) par une constante positive, et de donner une primitive de cette fonction. On aboutit ainsi par exemple à la fonction

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2x + \cos x.$$

Il est clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| = |2 - \sin x| \geq 1$. Donc, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, il résulte du théorème des accroissements finis que $|f(x) - f(x)| \geq |x-y|$. La figure suivante donne les graphes des fonctions f et f' (et de la fonction $x \mapsto 2x$) En effet, fonction f est une “petite” perturbation oscillante de la fonction $x \mapsto 2x$, qui, elle, est clairement un difféomorphisme de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On “voit bien” sur ce dessin que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = f(y)$. On a $\alpha \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| = 0$, donc $x = y$. Ceci montre que f est injective.

3. C'est l'endroit de l'exercice où il faut utiliser que $\mathbb{R}^n$ est complet. Soit (y_p) une suite d'éléments de $f(\mathbb{R}^n)$, de limite $\ell \in \mathbb{R}^n$. On veut démontrer que $\ell \in f(\mathbb{R}^n)$. Or, puisque la suite (y_p) converge, elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$p, q > N \Longrightarrow \|y_p - y_q\| < \alpha\varepsilon.$$

D'autre part, puisque $(y_p) \in f(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite (x_p) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $y_p = f(x_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Il résulte de l'hypothèse de l'énoncé que $\|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y_p - y_q\|$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. On en déduit :

$$p, q > N \Longrightarrow \|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y_p - y_q\| < \frac{1}{\alpha}\alpha\varepsilon = \varepsilon.$$

On vient ainsi de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p, q \in \mathbb{N}$ et supérieurs à N, alors $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$: la suite (x_p) est de Cauchy. *Puisque* $\mathbb{R}^n$ *est complet*, on en déduit que (x_n) admet une limite $a \in \mathbb{R}^n$. Par continuité de f (on rappelle que f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$), il vient que $\lim_{p\to\infty} f(x_p) = f(\lim_{p\to\infty} x_p)$, c'est à dire que $\ell = f(a)$. On déduit que $\ell \in f(\mathbb{R}^n)$.

Nous avons bien prouvé que $f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

4. Là encore, il est assez malvenu de fixer un accroissement $h \in \mathbb{R}^n$, puis de le faire tendre vers 0 sans une rédaction soignée. Il est plus simple et plus élégant de procéder de la façon suivante.

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$. On rappelle que, puisque f est différentiable au point x, $\mathrm{d}_x f(h)$ est égale à la *dérivée directionnelle de f au point x dans la direction h*, c'est à dire :

$$\mathrm{d}_x f(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Supposons que $h \in \ker(\mathrm{d}_x f)$. La limite ci-dessus est donc nulle. Or, d'après l'hypothèse de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \|f(x+th) - f(x)\| &\geq \alpha\,|t|\,\|h\|\,, \text{ et donc} \\ \frac{\|f(x+th) - f(x)\|}{|t|} &\geq \alpha\,\|h\|\,. \end{aligned}$$

On en déduit, en passant à la limite lorsque t tend vers 0, que $\|h\| = 0$ et donc que $h = 0$. Ceci démontre que $\ker(\mathrm{d}_x f) = 0$ et donc que $\mathrm{d}_x f$ est injective.

Remarque. Lorsqu'on travaille avec une application linéaire L, *on ne montre pas que L est injective en montrant que $L(x) = L(y)$ implique $x = y$! On montre que son noyau est réduit à* $\{0\}$! D'autre part, dans cette question il est hasardeux d'utiliser la norme de l'application linéaire $\mathrm{d}_x f$ sans bien en maîtriser la définition ou le maniement !

5. Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, le fait que $\mathrm{d}_x f$ soit injective en un point $x \in \mathbb{R}^n$ implique que $\mathrm{d}_x f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$, grâce au Théorème du rang. Il résulte du Théorème d'inversion locale que f est un difféomorphisme local en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. En particulier, suivant un raisonnement déjà vu en cours, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage V de y dans $\mathbb{R}_n$ tels que $f|_U : U \to V$ soit un difféomorphisme. Aini, pour tout $y \in f(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble $f(\mathbb{R}^n)$ contient un voisinage de y : il en résulte que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert.

D'autre part, il a déjà été prouvé que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé. L'ensemble $f(\mathbb{R}^n)$ est donc un sous-ensemble non vide, ouvert et fermé de $\mathbb{R}^n$. Or $\mathbb{R}^n$ est connexe. Donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Il en résulte que $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est surjective, et donc, grâce aux résultats précédents, que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque. Pour cette question, il n'y a pas d'autre raisonnement possible. En particulier, toute preuve qui coniste à montrer *d'abord* que f est une bijection et donc une surjection, est parfaitement fantaisiste.

IV

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la fonction f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

De plus, f est continue en $(0,0)$. En effet, pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $|f(x,y)| \leq |x|\,|y|$. Donc f est de limite nulle à l'origine.

On montre ensuite que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. En effet :

$$\left|\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}\right| = \left|y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |y| \ \text{ et}$$
$$\left|\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y}\right| = \left|x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |x|\,,$$

donc ces deux taux d'accroissements sont de limites nulle à l'origine. On a donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Un calcul direct montre que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\,\left(x^4 + 4\,x^2\,y^2 - y^4\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\,\left(x^4 - 4\,x^2\,y^2 - y^4\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Il s'agit de deux fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule qu'en $(0,0)$: elles sont donc continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus un calcul immédiat, utilisant le passage aux coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, montre que ces deux dérivées partielles sont de limite nulle à l'origine. Elles sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi la fonction f est contine, de classe $\mathcal{C}^1$ hors de $(0,0)$, et admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2$: elle est de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}^2$.