Université de Bourgogne Janvier 2018
Département de Mathématiques - L3

CALCUL DIFFERENTIEL - CORRIGÉ DE L'EXAMEN (3 heures)

Les quatre exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

I *(10 pts)*

On considère l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2+z^2-1=0\right\}$, et le point $A=(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

1. ***(2 pts)*** Montrer que $\mathcal{E}$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, qui ne contient pas le point A. On considère la fonction $f\colon (x,y,z) \mapsto x^2+4y^2+z^2-1$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Sa matrice jacobienne en un point (x,y,z) est $(2x, 8y, 2z)$ qui est de rang 1 en tout point sauf en l'origine O. Puisque $O \notin \mathcal{E}$, alors $\mathrm{d}_a f$ est de rang 1 en tout point de $\mathcal{E}$: on en déduit que $\mathcal{E}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de codimension 1, et donc de dimension 2.
2. ***(2 pt)*** Soit $M=(x,y,z) \in \mathcal{E}$. Donner l'équation du plan tangent $T_M\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}$ au point M. Le plan tangent $T_M\mathcal{E}$ est le plan affine passant par M et dirigé par le noyau de l'application linéaire $\mathrm{d}_M f$. C'est donc le plan d'équation
$$x\,(X-x) + 4y\,(Y-y) + z\,(Z-z) = 0 \quad \text{ou encore}$$
$$xX + 4yY + zZ = x^2+4y^2+z^2, \text{ c'est-à-dire, puisque } M \in \mathcal{E},$$
$$xX+4yY+zZ = 1.$$
3. ***(2 pts)*** Déterminer l'ensemble $\mathcal{L}$ des points de $\mathcal{E}$ en lesquels le plan tangent $T_M\mathcal{E}$ est parallèle au plan Oxy. Le plan $T_M\mathcal{E}$ est parallèle à Oxy si et seulement si $x=y=0$. Or les seuls points de $\mathcal{E}$ en lesquels $x=y=0$ sont les points $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$.
4. On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que le plan tangent $T_M\mathcal{E}$ contienne le point A.
   (a) ***(2 pts)*** Montrer que $\mathcal{C}$ est l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le plan $\mathcal{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x+4y+z-1=0\right\}$. Le plan $T_M\mathcal{E}$ contient le point $A=(1,1,1)$ si et seulement si les coordonnées de A vérifient l'équation de $T_M\mathcal{E}$, c'est-à-dire si $x+4y+z=1$.
   (b) ***(2 pts)*** En déduire que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. La courbe $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points béri par le système d'équations :
$$x^2+4y^2+z^2 = 1$$
$$x+4y+z = 1.$$
   Or la matrice jacobienne en un point (x,y,z) de l'application $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y,z) = \left(x^2+4y^2+z^2, x+4y+z\right)$ est :
$$\begin{pmatrix} 2x & 8y & 2z \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Les points en lequels elle est de rang strictement inférieur à 2 sont ceux en leques les deux lignes sont colinéaires, c'est à dire les points tels que $x=y=z$. Mais un calcul direct montre qu'aucun de ces points n'est solution du système d'équations ci-dessus. En effet, en un tel point on aurait $6x^2=1$ et $6x=1$, ce qui est impossible.

II *(4 pts)*

On considère la fonction $f\colon\ (x,y) \mapsto x^4+x^3y+2y^4+x^5+4x^4y+y^6$.

1. ***(1 pts)*** Montrer que l'origine est un point critique de la fonction f. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x^3+3x^2y+5x^4+16x^3y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^3+8y^3+4x^4+6y^5,$$
donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Donc l'origine est un point critique de f.
2. ***(2 pts)*** Etudier le signe du polynôme $P(x,y) = x^4+x^3y+2y^4$. Le polynôme P est homogène de degré 4, donc il est commode de poser $y=tx$. On obtient :
$$P(x,tx) = x^4\left(2t^4+t+1\right) = x^4 g(t).$$
On étudie donc le signe de la fonction g. On a $g'(t) = 8t^3+1$, donc la fonction g est décroissante depuis $+\infty$ jusqu'à $g\left(-\frac{1}{2}\right)$, puis croissante jusqu'en $+\infty$. Or $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2}+1 > 0$, donc g est une fonction strictement positive. On en déduit que $P(x,y)$ est strictement positif pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.

3. ***(1 pt)*** En déduire la nature du point critique O pour la fonction f. Le polynôme P est, à une constante multiplicative positive près, égal à $\mathrm{d}^4_{(0,0)}f$. Puisque 4 est pair, il résulte du résultat précédent, à l'aide d'une proposition du cours basée sur la formule de Taylor, que l'origine est un minimum local strict de f.

III *(4 pts)*

On rappelle que les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* sont définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},\ \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On considère le demi-plan ouvert $\mathcal{P} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u > 0\right\}$ et l'application $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(u,v) = (x,y) = (u\cosh(v), u\sinh(v)).$$

1. ***(2 pts)*** Montrer que φ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathcal{P}$. Il suffit de calculer le déterminant jacobien de f en tout point $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. On trouve :

$$\begin{vmatrix} \cosh(v) & u\sinh(v) \\ \sinh(v) & u\cosh(v) \end{vmatrix} = u\left(\cosh^2(v) - \sinh^2(v)\right) = u > 0.$$

   Il résulte du Théorème d'inversion locale que φ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. ***(2 pts)*** Montrer que φ est un difféomorphisme de $\mathcal{P}$ sur l'ouvert $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, |y| < x\right\}$ de $\mathbb{R}^2$. Il suffit de montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur U. Soit donc $(x,y) \in U$. On cherche un antécédent (unique) de (x,y) par φ, c'est-à-dire un couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$u\cosh(v) = x$$
$$u\sinh(v) = y.$$

   En divisant, on trouve $\tanh(v) = \frac{y}{x}$. Or, puisque $(x,y) \in U$, on a $\frac{y}{x} \in \left]-1,1\right[$, et puisque tanh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-1,1\right[$, il existe un nombre $v \in \mathbb{R}$ unique solution de l'équation. On obtient alors $u = \frac{x}{\cosh(v)}$.
   On a bien montré que tout élément $(x,y) \in U$ admet un antécédent unique $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par φ : il en résulte, à l'aide de la question précédente que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur U.

IV *(4 pts)*

On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^3 - y^2 + x^2 - y = 0\right\}$.

1. ***(2 pts)*** Montrer que $\mathcal{C}$ est, au voisinage de l'origine, le graphe d'une fonction $\varphi \colon x \mapsto y = \varphi(x)$. On applique le Théorème de fonctions implicites à la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ $f \colon (x,y) \mapsto x^4 + y^3 - y^2 + x^2 - y$. On note que $(0,0) \in \mathcal{C}$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$. Il en résulte que $\mathcal{C}$ est localement, au voisinage de l'origine, le graphe d'une fonction $\varphi \colon x \mapsto y = \varphi(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(0) = 0$.
2. ***(2 pts)*** Calculer les dérivées $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0 :

$$x^4 + \varphi^3(x) - \varphi^2(x) + x^2 - \varphi(x) = 0.$$

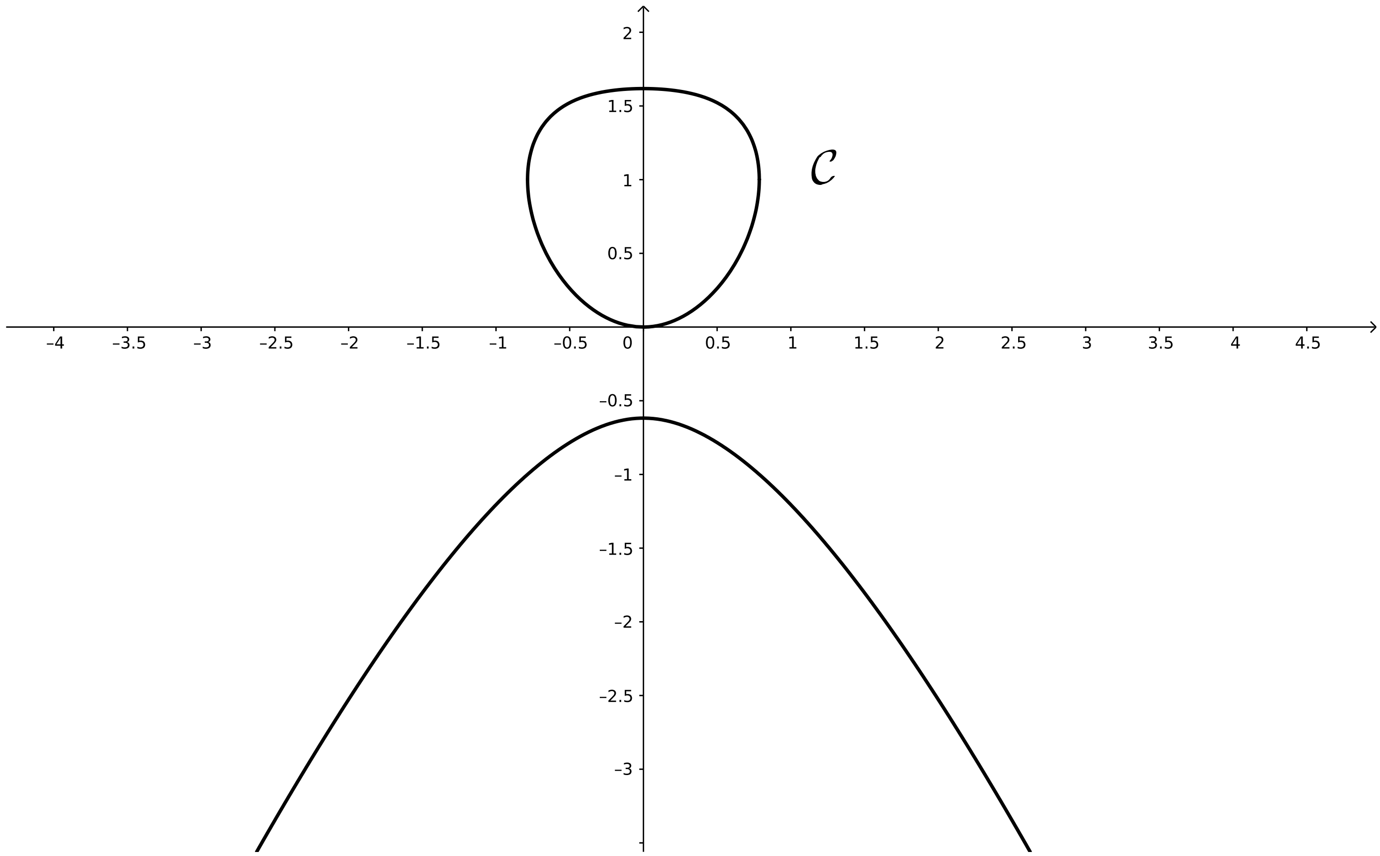
   Donc, en dérivant, on obtient :

$$4x^3 + 3\varphi'(x)\varphi^2(x) - 2\varphi'(x)\varphi(x) + 2x - \varphi'(x) = 0, \text{ et donc, en évaluant en } x = 0,$$
$$\varphi'(0) = 0.$$

   En dérivant à nouveau il vient :

$$12x^2 + 3\varphi''(x)\varphi^2(x) + 6\varphi'(x)^2\varphi(x) - 2\varphi''(x)\varphi(x) - 2\varphi'(x)^2 + 2 - \varphi''(x) = 0, \text{ et donc}$$
$$\varphi''(0) = 2.$$

   Remarque : puisque $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) > 0$, cela implique que l'origine est un minimum local strict de la fonction φ.



$\mathcal{C}$
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−3
−4
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5