L3 - Calcul différentiel
Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder

Théorème (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder pour des nombres réels)**.** *On considère deux collections* $(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $(y_1, \ldots, y_n)$ *de nombres réels.*

1. *On a l'inégalité de Cauch-Schwarz :*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}.$$

2. *Soient* $p, q \in [1, +\infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. On a l'inégalité de Hölder :*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{q} |x_k|^q\right)^{1/q}.$$

Démonstration. Dans un premier temps on rappelle que la fonction ln est *concave* : en effet, pour $x > 0$, on a $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Cela implique que pour tous $x, y > 0$ et tous réels $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\lambda + \mu = 1$, on a $f(\lambda x + \mu y) \geq \lambda f(x) + \mu f(y)$ (autrement dit, pour tout réel c compris entre x et y, la valeur de $f(c)$ est supérieure ou égale à l'ordonnée du point d'abscisse c sur le segment qui joint les points les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

1. Donc, en appliquant cette inégalité de concavité à $\lambda = \frac{1}{p}$ et $\mu = \frac{1}{q}$, on a, pour tous $x, y > 0$, on a :

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(xy),$$

   et donc :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

   Ensuite se place dans un cas particulier : on suppose que $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{p} |y_k|^q = 1$. D'après ce qu'on vient de montrer, on a, pour tout $k = 1, \ldots, n$:

$$x_k y_k \leq \frac{x_k^p}{p} + \frac{y_k^q}{q},$$

   et donc, en sommant sur $k = 1, \ldots, n$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^p}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{|y_k|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

   On conclut dans le cas général, en appliquant le cas particulier aux collections :

$$x'_k = \frac{x_k}{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p} \text{ et } y'_k = \frac{y_k}{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q}.$$