NORMES, TOPOLOGIE ET APPLICATIONS CONTINUES

1 Normes et distances

Une ***norme*** sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. (*homogénéité*) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.
2. (*inégalité triangulaire*) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
3. (*séparation*) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Le couple $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est alors appelé ***espace (vectoriel) normé***.
Deux normes $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ sur $\mathbb{R}^n$ sont dites ***équivalentes*** s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on ait :

$$\alpha \|x\| \leq |||x||| \leq \beta \|x\| .$$

Une ***distance*** sur $\mathbb{R}^n$ est une application $\mathrm{d} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, on ait :

1. (*symétrie*) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.
2. (*inégalité triangulaire*) $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.
3. (*séparation*) $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Le couple $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d})$ est appelé un ***espace métrique***.
Deux distances d_1 et d_2 sur $\mathbb{R}^n$ sont ***équivalentes*** s'il existe deux nombres strictement positifs α et β, tels que, pour tout couple (x, y) de nombres réels, on ait :

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) .$$

Proposition. Soit $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une norme. Alors l'application $\mathrm{d}_{\|\cdot\|} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$. On appelle $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$ la ***distance induite par la norme*** $\|\cdot\|$.

2 Notions topologiques

On travaille sur l'evn $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, et on considère $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. La ***boule ouverte*** de centre a et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $B_a(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - a\| < r\}$.
2. La ***boule fermée*** de centre a et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\overline{B}_a(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - a\| \leq r\}$.
3. La ***sphère*** de centre a et de rayon r est l'ensemble $\mathcal{S}_a(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}$. Traditionnellement, on note $\mathcal{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, qu'on appelle la ***sphère unité de centre*** $0 \in \mathbb{R}^n$.

1. L'ensemble A est ***borné*** s'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tel que $A \subseteq B(a, r)$.
2. L'ensemble A est ***ouvert*** si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit contenue dans A.
3. L'ensemble A est ***fermé*** si le complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash A$ de A dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert.
4. L'ensemble A est ***compact*** si, de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une suite convergeant dans A.

Proposition. *1. Soient $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ deux normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Alors un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert (resp. fermé, compact) pour la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si A est ouvert (resp. fermé, compact) pour la norme $|||\cdot|||$.*
2. Un sous ensemble A d'un espace normé est ***compact*** *si et seulement si il est* ***fermé et borné****.*
3. Toutes les ***normes*** *sur un e.v.n. de dimension finie sont* ***équivalentes***

3 Applications continues

On travaille sur les espaces normés $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ et $(\mathbb{R}^q, |||\cdot|||)$. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^p$ un ensemble ouvert.

1. Une application $f\colon U\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ est ***continue*** au point $a\in U$ si :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in U,\ \ \|x-a\|<\eta\Longrightarrow|||f(x)-f(a)|||<\varepsilon.$$

2. Ou encore :

$$f(a+h)=f(a)+\varepsilon(h),$$

où $a+h\in U$ et ε est une fonction définie au voisinage de $0\in\mathbb{R}^p$ et de limite nulle en $0\in\mathbb{R}^p$.

3. L'application $f\colon U\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ est ***continue*** sur U si elle est continue en chaque point de U.

Theorème.

1. *L'image réciproque par f d'un sous-ensemble ouvert (*resp. fermé*) de $\mathbb{R}^q$ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^p$.*
2. *L'image (directe) d'un ensemble compact par une application continue est également un ensemble compact.*
3. *Soient $A\subset\mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $f\colon A\to\mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée, et "atteint ses bornes" : il existe $a\in A$ et $b\in A$ tels que :*

$$f(a)=\max_{x\in A}f(x)\ \text{ et } f(b)=\min_{x\in A}f(x).$$

4 Normes d'applications linéaires

Notation. On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, et par $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices à q lignes et p colonnes. Si $p=q$, on note ces espaces respectivement $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On munit l'espace $\mathbb{R}^p$ d'une norme $\|\cdot\|$ et l'espace $\mathbb{R}^q$ d'une norme $|||\cdot|||$.

Proposition.

1. *L'application :*

$$N\colon\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)\longrightarrow\mathbb{R}_+,\ L\longmapsto\max_{\|x\|\le1}|||L(x)|||=\max_{\|x\|=1}|||L(x)|||$$

est une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$, dite ***subordonnée aux normes*** $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$. *Si $p=q$, et qu'on munit $\mathbb{R}^p$ à la source et au but de la même norme $\|\cdot\|$, on dit que la norme N définie comme ci-dessus est* **subordonnée** à la norme $\|\cdot\|$.

2. *Pour toute application linéaire $L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$, et tout $x\in\mathbb{R}^p$ on a :*

$$|||L(x)|||\le N(L)\|x\|.$$

3. *On munit de plus l'espace $\mathbb{R}^r$ d'une norme $|||\cdot|||'$. On note N la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$, N' la norme subordonnée à $|||\cdot|||$ et $|||\cdot|||'$, et N'' la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||'$. Alors N est une* ***norme matricielle,*** *c'est à dire que, pour tout $L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ et tout $L'\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^r)$:*

$$N''(L'\circ L)\le N'(L')N(L).$$

En particulier, si $p=q=r$, si $\|\cdot\|=|||\cdot|||=|||\cdot|||'$ et si N désigne la norme subordonnée à $\|\cdot\|$, on a, pour tous $L,L'\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$:

$$N(L'\circ L)\le N(L')N(L).$$

Remarque. 1) Au lieu de *norme subordonnée*, on parle également de *norme d'opérateur*.
2) De même que pour les applications linéaires, on définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la norme N subordonnée à une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ N(A)=\max_{\|x\|\le1}\|Ax\|=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|.$$

Ici, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, x et Mx sont vus comme des *vecteurs colonnes* de $\mathbb{R}^n$.

Exemples de normes subordonnées. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a donc $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$, où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne. Les différentes normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnées aux normes classiques sur $\mathbb{R}^n$ s'écrivent :

1. $$\|\cdot\|_\infty\longrightarrow\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|.$$
2. $$\|\cdot\|_1\longrightarrow\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|.$$
3. $$\|\cdot\|_2\longrightarrow\|A\|_2=\sqrt{\rho({}^tAA)}$$

   où ρ est le *rayon spectral* de la matrice *symétrique* ${}^tAA$, c'est à dire sa plus grande valeur propre (elle est positive).

Remarque. La *norme de Frobenius* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A\mapsto N(A)=\sqrt{\operatorname{tr}({}^tA\cdot A)}$ est un exemple de norme matricielle qui n'est pas une norme d'operateur (voir TD).