Curriculum Vitae.
Activités scientifiques, enseignement, responsabilités et projet de recherche

Jean-Philippe Rolin

2017

Contents

1 Renseignements personnels

- **Date de naissance** : 03/11/1959 ; **Nationalité** : française ; **email** : rolin@u-bourgogne.fr

2 Diplômes

- 1982. PhD Université de Bourgogne, Dijon : "Géométrie intégrale et invariants d'isotopie"

- 2001. HDR (Habilitation), Université de Bourgogne, Dijon : "Géométrie Pfaffienne, Polygône de Newton et Structures o–minimales"

3 Emplois

- Depuis 1982: MCF (Maître de conférences), Université de Bourgogne, Dijon.
- Depuis 2005: MCF Hors classe, Université de Bourgogne, Dijon.

4 Séjours a l'étranger

- University of Madison (Wisconsin, USA), november 2000
- Université de Cracovie, Poland, january 2001
- Université de Valladolid, Espagne, plusieurs séjours
- McMaster University, Hamilton, Canada, plusieurs séjours
- Semestre "Model Theory and applications to algebra and analysis", Cambridge, juin 2005
- Semestre "O-minimal Structures and Real Analytic Geometry", 2009, Fields Institute, Toronto, janvier-juin 2009
- Université de Lisbonne, Portugal, plusieurs séjours
- Université de Zagreb, Croatie, Novembre 2012
- Université de Pise, Italie, Février - Juin 2012
- Université de Pise, Italie, Janvier - Juin 2015

5 Conférences lors de rencontres internationales depuis 2000

- "Asymptotic series, differential algebra and finiteness problems", Centre de Recherches Mathématiques de Montréal, juin 2000
- "Analytic Geometry and Singularity", Banach Center, Varsovie, septembre 2000
- "Midwest model theory meeting", University of Madison (Wisconsin, USA), novembre 2000
- Final meeting of european network "Singularities of differential equations and foliations", Lisbonne, mai 2001
- "Tame Geometry and abelian integrals", C.I.R.M. (Luminy), juin 2001
- "Analyzable functions and applications", Edinburgh, juin 2002
- "Resurgence, alien calculus, resommability and transseries", CIRM, novembre 2002
- Meeting of european netword "R.A.A.G", Pise, mars 2003
- "Real singularities in Savoie", Université de Savoie, France, juin 2003
- Colloque in honnor of Prof. Lojasiewicz, Cracovie, mars 2004
- "Model theory, algebraic and analytic geometry", Cambridge, juillet 2005
- Meeting of european network RAAG "Tame geometry, a tribute to R. Thom and S. Lojasiewicz", Chambéry, France, juin 2005
- Meeting of european network RAAG, Passau (Allemagne), septembre 2005
- Trimester "Real Geometry", I.H.P., Paris, septembre 2005
- "Differential Equations and Singularities", in honnor of Prof. Aroca, Tordesillas (Espagne), septembre 2006
- Hayashibara forum on Singularities, I.H.E.S, novembre 2006
- Workshop in honnor of Andrei Gabrielov, Edinburgh, mai 2008
- Workshop of european network MODNET (Model Theory), Barcelone, novembre 2008

- ESF Mathematics Conference in Model Theory, Bedlewo, août 2009
- Conférence “Real Algebraic Geometry”, Rennes, juin 2011.
- Conférence “Resolution of singularities and related topics”, Tordesillas, septembre 2011
- Conférence “Feuilletages et équations différentielles complexes”, CIRM, octobre 2012
- Workshop “Model Theory and Applications to Geometry”, Lisbon, juillet 2013
- Logic Colloquium, Evora (Portugal), juillet 2013
- Workshop “Applications of O-Minimality to Analysis and Number Theory”, Passau, septembre 2013
- Workshop “O-minimality and applications”, Konstanz, juillet 2015
- Workshop “Structures algébriques ordonnées et leurs interactions”, CIRM, octobre 2015
- Workshop “Model Theory: From Fields to Hardy Fields”, Fields Institute, Toronto, août 2016
- Colloque en l’honneur de M. Shiota, Nagoya, Japon, mars 2017
- Workshop “Geometry of Singularities and Differential Equations”, Santander, Espagne, juin 2017 (invitation)
- Workshop “Galois meets Newton: algebraic and geometric aspects of singularity theory”, Rehovot, Israel, juillet 2017 (invitation)

6 Participation à divers projets

- Responsable français du Partenariat Franco-Espagnol Hubert Curien “Picasso”, 2006-2008
- Membre du GDR “Singularités and applications”, CNRS 2945, France, 2006-2010, responsable M. Granger
- Member du Projet “Analyse Nonlinéaire des équations différentielles et systèmes dynamique” (036-0361621-1291), Université de Zagreb, Croatie
- Membre du programme CNRS - FCT (Lisbon) sur les structures o-minimales (2011-2012)
- Responsable du partenaire 2 du programme ANR “STAAVF” (2011–2014)
- Membre du projet Franco-Brésilien CAPES/COFECUB MA 731-12, dirigé par Daniel Panazzolo et Lev Birbrair
- Membre du programme bilatéral Cogito Croatie-France *Classification de points fixes et de singularités* à *l’aide d’epsilon-voisinages d’orbites et de courbes* (2011–2012, puis 2014 – 2016).

7 Directions de thèses

- Michael Matusinski. “Développements asymptoptiques de solutions d’équations différentielles” (thèse soutenue en 2007. Actuellement maître de conférences à l’Université de Bordeaux)
- François Michas. “Théorèmes de préparations dans les classes quasi-analytiques” (2012)
- Rafael Martin. “Élimination des quantificateurs pour les séries généralisées” (2011)
- Emmanuel Vieillard-Baron. “From resurgent functions to real resummation through combinatorial Hopf algebras” (2014)

8 Administration scientifique

- Responsable de l'équipe "Equations différentielles et Contrôle", IMB, Dijon, 2009-2010
- Responsable de la Collection "Cours Spécialisés de la Société Mathématique de France" 2010-2012
- Membre du conseil du Laboratoire IMB, Dijon jusqu'en 2015
- Co-organisateur du colloque "Tame geometry and abelian integrals" june 2001
- Co-organisateur de la session "Singularities of differential equations", First spanish-french meeting of mathematics, Saragosse, juillet 2007
- Co-organisateur du semestre "O-minimal Structures and Real Analytic Geometry", 2009, Fields Institute, Toronto
- Co-organisateur du colloque "Singularités Réelles et Systèmes Dynamiques", Nice, mai 2011
- Co-organisateur du colloque "O-minimal Structures and Real Analytic Geometry", Fields Institute, août 2011
- Responsable français du programme CNRS - FCT (Lisbonne) sur les structures o-minimales (2011-2012)
- Responsable du partenaire 2 du programme ANR "STAAVF" *Singularités de Trajectoires de champs de vecteurs analytiques et algébriques* (initialisé en 2012)
- Co-organisateur du colloque "*Géométrie Analytique Réelle et Trajectoires de Champs de Vecteurs*", CIRM, juin 2015

9 Responsabilités éditoriales

- Responsable de la Collection "Cours Spécialisés de la Société Mathématique de France" 2010-2012
- Coéditeur du volume 62 du Fields Institute, *Lecture notes on o-minimal structures and real analytic geometry*, 2012 [17]
- Rapporteur pour de nombreuses revues, dont *Acta Mathematica*, *Annales Scientifiques de l'E.N.S., Canadian Journal of Math., Journal of European Math. Society, Annales de l'Institut Fourier,...*

10 Administration universitaire à l'Université de Bourgogne

- Directeur du site délocalisé "Centre Universitaire Condorcet", 2002–2003
- Responsable du diplôme de Licence, mention mathématiques, 2011–2012
- Membre du C.A. de l'Université de Bourgogne, 2012–2016
- Membre du Conseil du Laboratoire I.M.B., Dijon, jusqu'en 2016
- Membre du Bureau du Laboratoire I.M.B., Dijon, jusqu'en 2015
- Responsable d'un programme d'échanges ERASMUS pour les mathématiques avec l'Universitat Politecnica de Catalunya, 2000–2016

11 Enseignement

- **En France**
  - Enseignement dans de nombreux cours à l'Université de Bourgogne, parmi lesquels :
    - Calcul différentiel et intégral, L3 mathématique
    - Statistiques, tests d'hypothèses, L2 Psychologie
    - Mathématiques et informatique, L3 mathématiques, avec des applications aux calcul d'invariants en théorie des noeuds, à la cryptographie asymétrique à clé publique (factorisation et codage RSA), à la cryptographie par les courbes elliptiques, ...

- * Fonctions de plusieurs variables, Calcul matriciel, Département Génie Mécanique et Productique de l'I.U.T.
  - * Approximation, interpolation, courbes Splines, Licence professionnelle, Département Génie Mécanique et Productique de l'I.U.T.
  - * Formation d'enseignants à divers logiciels, dont le logiciel mathématique MAPLE
  - * Géométrie algbrique et analytique réelle, Master 2
- ❑ Cours sur les structures o-minimales, lors du Trimestre "Real Geometry", I.H.P., Paris, sept. 2005

- **A l'étranger**
  - ❑ Cours "Geometry and model theory", University of Madison (Wisconsin, USA), novembre 2000
  - ❑ Cours "Construction of o-minimal Structures from Quasianalytic Classes", lors du semestre "O-minimal Structures and Real Analytic Geometry", mars 2009, Fields Institute, Toronto, Canada
  - ❑ Cours "Quasianalyticity and o-minimality", Banach Center, Varsovie, lors du Workshop "Contemporary quasi-analyticity problems", 19-27 avril, 2017

12 Travaux de recherche

12.1 Thèmes de recherche

On peut ranger le comportement qualitatif des solutions d'équations différentielles dans le domaine réel en deux catégories grossières: ***oscillant*** ou ***non oscillant***. Par exemple, une trajectoire d'un champ de vecteurs réel peut-être qualifiée de "non oscillante" (ou "sous-analytiquement non oscillante") au voisinage d'un point si elle n'a, au voisinage de ce point, qu'un nombre fini de points d'intersection avec tout ensemble sous-analytique global de codimension 1. On voit ici que la "non oscillation" est mesurée à l'aune des ensembles sous-analytiques globaux. Il est raisonnable de considérer cette famille d'ensembles pour tester l'oscillation ou la non oscillation d'une courbe "transcendante" (*i.e.* non analytique), car il est bien connu qu'elle est "globalement non oscillante" (c'est une famille stable par les opérations booléennes et les projections linéaires, dont tous les éléments ont un nombre fini de composantes connexes).

Ça n'est pas le cas en revanche pour la famille des trajectoires de champs de vecteurs. Il est en effet facile de produire des exemples de paires de trajectoires "sous-analytiquement non oscillantes" qui oscillent l'une par rapport à l'autre, ou qui spiralent l'une autour de l'autre. De telle sorte qu'une de ces deux trajectoire est considérée comme non oscillante par rapport aux ensembles sous-analytiques globaux, mais oscillante par rapport à d'autres trajectoires. Ceci donne l'idée d'affiner la mesure de non oscillation en considérant d'autres familles d'ensembles "globalement non oscillantes" que celle des ensembles sous-analytiques globaux. De telles familles s'appellent ***structures o-minimales***. En voici la définition précise.

Rappelons que si $\mathcal{F} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ est une famille de fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est dit ***définissable dans la structure*** $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ engendrée par $\mathcal{F}$ s'il appartient à la plus petite famille de sous-ensembles des espaces euclidiens contenant le graphe des éléments de $\mathcal{F}$ et des applications polynomiales, et stable par les opérations booléennes, par produit cartésien et les projections linéaires. La structure $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est dite ***o-minimale*** si tous les ensembles définissables de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ont un nombre fini de composantes connexes. La structure $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est dite ***modèle-complète*** si dans la définition ci-dessus, l'opération de passage au complémentaire est superflue (et vérifie ainsi un ***théorème du complémentaire*** à la Gabrielov).

Cette notion a été introduite en 1984 par certains théoriciens des modèles, dont L. van den Dries, A. Pillay et C. Steinhorn, afin d'aborder le "problème de Tarski". Il s'agissait là d'étendre à la fonction exponentielle certains résultats valides dans la "structure" $(\mathbb{R}, +, \times)$, notamment la propriété de finitude du nombre de composantes connexes des ensembles dits "définissables". Elle est depuis l'objet de nombreux travaux de théoriciens de modèles, qui considèrent comme ensemble de base non seulement le corps des réels, mais un corps ordonné non archimédien, voire un groupe ordonné.

Mon approche est plus géométrique. Je considère la notion de structure o-minimale comme une extension naturelle de la géométrie analytique réelle. Je cherche à comprendre à quel point les ensembles définis par des familles de fonctions issues de "problèmes naturels", notamment de l'étude qualitative des équations différentielles, ont une géométrie proche de celle des ensembles semianalytiques et sous-analytiques (finitude du nombre de composantes connexes, stratification finie, . . .). Mes principales questions sont donc les suivantes:

1. A quelles conditions une famille de fonctions réelles engendre-t-elle une structure o-minimale ?
2. Etant donnée une structure o-minimale, quelles sont les propriétés des ensembles sous-analytiques globaux dont héritent les ensembles définissables dans cette structure ?

Certains de ces résultats ont fait l'objet d'un cours que j'ai donné au Fields Institute de Toronto en 2009, dans le cadre d'un semestre consacré aux structures o-minimales et à la géométrie analytique réelle [23].

12.2 Principaux résultats

Exponentielles et ensembles pfaffiens. J'ai prouvé avec J.-M. Lion, de façon analytique, (*i.e.* sans utiliser d'arguments de théorie des modèles) des résultats de ***modèle-complétude*** et d'***élimination des quantificateurs*** pour les fonctions log-exponentielles [10, 9]. Ce résultat permet ainsi de retrouver le fameux ***théorème de Wilkie*** sur l'exponentielle, qui n'est autre qu'une version du théorème du complémentaire de Gabrielov pour les ensembles définis par des égalités et inégalités en des polynômes exponentiels. Ces travaux nous ont permis d'obtenir des fomules logarithmiques sur le volume des ensembles sous-analytiques [13, 4].

Puis nous avons étendu d'un point de vue o-minimal les ***resultats de finitude de Hovanskii*** sur les ensembles pfaffiens. J'ai d'abord montré avec J.-M. Lion la finitude de l'homologie des ***ensembles semi-pfaffiens***, qui sont aux feuilles non spiralantes des feuilletages analytiques réels de codimension 1 ce que les ensembles semi-algébriques sont aux graphes des polynômes [8]. Puis, après avoir étudié la nature du bord de ces feuilles [11], nous avons considérablement étendu ce résultat en montrant que la structure engendrée par les feuilles non spiralantes était o-minimale [13]. Notons que le problème de la modèle complétude pour cette famille (c'est à dire de la validité d'un théorème du complémentaire de Gabrielov pour les ensembles sous-pfaffiens) est toujours ouvert.

Singularités de champs de vecteurs réels. Je me suis ensuite consacré au problème plus délicat de la nature o-minimale de la structure engendrée par une trajectoire non oscillante d'un champ de vecteurs analytique réel (au voisinage d'une singularité). Je suspecte que la réponse est positive dans le cas des champs de vecteurs en dimension 3, mais cela n'est n'est toujours pas connu. On sait que les germes de fonctions méromorphes restreintes à une telle trajectoire forment un corps de Hardy, mais l'on sait bien que "corps de Hardy n'implique pas structure o-minimale". En revanche, j'ai prouvé, avec F. Cano et R. Moussu, un résultat de ***désingularisation locale*** des champs de vecteurs analytiques réels en dimension 3 [2] Ici, "locale" signifie qu'on désingularise le champ pour une valuation donnée par le corps de Hardy d'une trajectoire non oscillante. Ce théorème permet de ramener l'étude de l'o-minimalité à celui d'un champ de vecteurs mis sous "forme finale". Pour de tels champs en dimension 3, la "zoologie" des trajectoires non oscillantes étant bien étudiée dans les travaux de Cano, Moussu et Sanz, j'ai bon espoir d'y trouver une piste sérieuse en vue de l'o-minimalité.

Quasianalyticité et o-minimalité. A côté de ces approches géométriques, il y a une autre approche fructueuse de l'o-minimalité : la ***quasianalyticité***. Rappelons qu'une algèbre de fonctions, ou de germes de fonctions, est dite *quasianlytique* si on peut la munir d'un morphisme *injectif* à valeurs dans un anneau de séries formelles (éventuellement à exposants réels positifs). Lorsque ce morphisme n'est autre que l'application donnée par le développement de Taylor des germes $\mathcal{C}^\infty$, j'ai montré, avec P. Speissegger et A. Wilkie, qu'une famille d'algèbres quasianalytiques de fonctions infiniment différentiables et stables par des opérations "raisonnables", comme la différentiation partielle et la prise de fonctions implicites, engendrait par *résolution des singularités* une structure o-minimale modèle-complète et polynomialement bornée [26]. Il s'avère qu'on trouve beaucoup d'exemples de telles classes. Citons par exemple les ***classes quasi-analytiques de Denjoy-Carleman***. L'étude de ces familles particulières nous a permis de montrer, en appliquant le résultat célèbre de S. Mandelbrojt qui affirme que toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle compact était la somme de deux fonctions appartenant à des classes de Denjoy Carleman (éventuellement différentes), les deux résultats suivants:

1) Il existe des paires de structures o-minimales n'admettant pas d'extension o-minimale commune; il n'existe donc pas de "plus grande extension o-minimale" du corps des réels.

2) Il existe des ensembles définissables dans des structures o-minimales qui ne peuvent (contrairement aux ensembles définissables précédemment étudiés) être stratifiés en variétés analytiques définissables.

Quasianalyticité et trajectoires non oscillantes de champs de vecteurs analytiques. Les résultats précedents sur les classes quasianalytiques m'ont permis d'aborder le problème de l'o-minimalité des trajectoires de champs de vecteurs analytiques avec des outils supplémentaires. Avec F. Sanz et R. Schaefke, j'ai appliqué la méthode introduite dans [26] aux structures engendrées par certaines trajectoires de champs de vecteurs analytiques réels (comme l'équation différentielle d'Euler). Nous avons montré que l'algèbre engendrée par les composantes de trajectoires convenables à l'aide des opérations précédentes est quasi-analytique, en utilisant les méthodes de sommation de séries divergentes solutions d'équations différentielles. Celà nous a permis de construire une infinité de structures o-minimales telles que deux d'entre elles n'admettent pas d'extension o-minimale commune [24]. De plus nous avons montré, à notre surprise, qu'il existe des trajectoires non oscillantes de champs de vecteurs qui ne sont définissables dans aucune structure o-minimale [24] (mais je maintiens tout de même ma conviction que cela n'est pas possible en dimension 3).

Contribution au problème de Dulac et à la cyclicité. Considérons un champ de vecteurs analytique défini sur un ouvert du plan réel, et un polycycle de ce champ de vecteurs dont les sommets sont des points singuliers non dégénérés (la partie linéaire du champ en chacun de ces points est non nilpotente). Le problème de Dulac revient à montrer que l'application de premier retour de Poincaré de ce polycyle (si elle existe), admet au plus un nombre fini de point fixes isolés. L'application de Poincaré est la composée d'applications analytiques restreintes et de certaines applications définies au voisinage des sommets, dites *applications de transition*. Ma contribution à ce problème est, pour l'instant, modeste. Avec T. Kaiser et P. Speissegger, j'ai montré les applications de transition qui correspondent aux sommets hyperboliques non résonants sont définissables dans une même structure o-minimale. Nous utilisons pour celà les résultats de quasianalyticité d'Ilyashenko, que nous étendons en des algèbres de germes de plusieurs variables. La notion de quasianalyticité s'étend cette fois à des fonctions dont le développement asymptotique est une série formelle à exposants réels positifs. Celà nous permet de prouver, grâce à la propriété de finitude uniforme des ensembles définissables, un résultat de cyclicité finie pour les perturbations de champs de vecteurs satisfaisant la condition d'hyperbolicité non résonnante [5].

Structures o-minimales sans stratification de classe $\mathcal{C}^\infty$. L. van den Dries a prouvé que pour tout entier $k \geq 0$, les ensembles définissables d'une structure o-minimale admettent une stratification finie en variétés définissables de classe $\mathcal{C}^k$. Le problème de l'existence de structures o-minimales sans la propriété de stratification de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'est longtemps posé (en lien avec le fait connu qu'il existe des corps de Hardy dont certains éléments n'admettent pas de réprésentant $\mathcal{C}^\infty$). J'ai prouvé avec O. Le Gal l'existence d'une telle structure [6]. Là encore, notre contruction s'appuie sur l'étude de classes quasianalytiques convenables.

Uniformisation locale des séries généralisées. En collaboration avec R. Martin Villaverde et F. Sanz Sanchez, j'ai introduit un cadre destiné à étendre les concepts usuels de géométrie algébrique et analytique réelle aux séries généralisées convergentes [28]. Ces dernières sont des sommes de familles sommables de monômes à coefficients réels et à exposants réels positifs, dont le support satisfait une propriété de bon ordre. Elles ont été étudiées sous l'angle de l'o-minimalité par L. van den Dries et P. Speissegger. J'ai défini une notion générale de *variété analytique généralisée*, ainsi que les morphismes associés (en particulier les *morphismes d'éclatement*). Dans ce contexte, j'ai démontré un théorème de *monomialisation locale*, analogue à l'énoncé bien connu dans le cadre analytique.

Quasianalyticité et théorème de rectilinéarisation d'Hironaka. J'ai mentionné plus haut le fait que la collection des ensembles définissables d'une structure o-minimale hérite de plusieurs propriétés de la famille des ensembles sous-analytiques globaux (finitude du nombre de composantes connexes, stratification finie en variétés définissables). Dans un travail en collaboration avec T. Servi [25], je prouve que la propriété de ***rectilinéarisation*** s'étend également aux ensembles définissables d'une structure définie par une collection d'algèbres quasianalytiques de fonctions réelles. Cet énoncé affirme qu'un ensemble sous-analytique peut être transformé localement en un nombre fini de quadrants à l'aide d'une collection localement finie de suites finies d'éclatements de son espace ambiant.

Le cadre dans lequel nous travaillons étend la quasianalyticité à des algèbres de fonctions équipées d'un morphisme injectif à valeurs dans les séries formelles à exposants réels positifs. Il contient en fait une grande partie des structures o-minimales ***polynomialement bornées*** (*i.e.* dont les fonctions définissables en une variable admettent une croissance au plus polynomiale à l'infini) connues.

Le point délicat est que les diverses preuves du résultat d'Hironaka s'appuient toutes sur le théorème de préparation de Weierstrass, qui fait notoirement défaut dans les classes quasianalytiques. C'est l'occasion pour nous de faire interagir théorie des modèles et analyse. En effet, pour contourner ce manque, nous utilisons un de théorie des modèles, du à P. Speissegger et L. van den Dries, qui jusqu'à présent n'a pas de preuve analytique. Il nous permet essentiellement de résoudre les équations quasianalytiques, suivant un modèle "à la Newton-Puiseux" issu des techniques classiques de géométrie analytique.

Théorème de préparation de Weierstrass dans les classes quasianalytiques Il est bien connu que le théorème de division de Weierstrass n'est pas valide dans les classes quasianalytiques. Comme c'est de ce résultat qu'on déduit en général le théorème de préparation de Weierstrass, sa validité dans les classes quasianalytiques était un problème ouvert. De fait, l'approche o-minimale des classes quasianalytiques s'est faite sans l'utiliser, mais en utilisant une version de la résolution des singularités [26]. Il s'avère que la réponse est négative. Plus précisément, Je viens de prouver, en collaboration avec Adam Parusinski, qu'un système quasianalytique qui satisfait la préparation de Weierstrass (et qui est stable par composition, division monomiale et fonction implicite) ne peut contenir que des germes analytiques [19].

12.3 Perspectives de recherche, travaux en cours

A propos du "théorème de préparation" des fonctions définissables. Je considère le résultat de P. Speissegger et L. van den Dries mentionné ci-dessus (appelé "théorème de préparation des fonctions définissables") comme un résultat profond, à la charnière entre la théorie des modèles, la géométrie et l'analyse. Il donne une forme factorisée des fonctions définissables dans les structures o-minimales polynomialement bornées, propice à la résolution des équations et à la compréhension de l'extension de telles structures par les fonctions exponentielle et logarithme. Toutefois, sa preuve, basée sur une analyse valuative des différents modèmes non archimédiens de la structure initiale, est encore globalement mal comprise, y compris par les théoriciens des modèles. Les tentatives d'en donner une preuve purement géométrique n'ont jusqu'à présent pas abouti.

Mon propos est d'aborder ce problème dans le cas particulier des classes quasianalytiques. En effet, dans ce cas, le fait qu'on puisse associer aux fonctions qui appartiennent aux algèbres initiales un "polyèdre de Newton" donne à penser qu'on peut donner une allure plus constructive à l'analyse valuative ci-dessus. Il me semble plus précisément que les méthodes empoyées par Zariski pour aboutir à "l'uniformisation locale" dans le cas algébrique (uniformisation suivant une valuation) peuvent donner dans ce cadre quasianalytique les résultats voulus.

Problème de Dulac et o-minimalité. Je compte poursuivre les recherches sur le lien "vraisemblable" entre o-miminalité et problème de Dulac dans deux directions.

a) Le travail précédent en collaboration avec T. Servi [25] s'applique à bon nombre de structures connues, mais ne fournit pas encore d'exemple nouveau de structure o-minimale. Or nous en avons une à l'esprit, en connection avec le problème de Dulac. Un article de Borichev et Volberg donne la preuve du théorème de Dulac pour un champ de vecteur à coefficients $\mathcal{C}^{\infty}$ quasianalytiques, sous l'hypothèse que les sommets du polycycle étudié sont hyperboliques et non résonants. Cette preuve suit les grandes lignes de la preuve originelle d'Ilyashenko pour les champs de vecteurs analytiques, grâce aux propriétés d'une collection de fonctions complexes dites "quasi-holomorphes". Nous pensons étendre les résultats de [5] dans ce cadre, afin de montrer que les applications de Poincaré de tels polycyles sont définissables dans une nouvelle structure o-minimale.

b) L'hypothèse de non-résonance des résultats de [5] est très restrictive. En particulier, même si l'on considère un polycycle hyperbolique non résonant d'un champ de vecteurs analytique, elle ne permet pas de prouver l'existence d'une borne uniforme pour le nombre de points fixes des applications de Poincaré d'une déformation analytique du champ. Afin de lever cette hypothèse, il nous faut considérer des algèbres quasianalytiques de fonctions réelles en un sens plus général. Elles doivent être équipées d'un morphisme injectif à valeurs dans des anneaux de "séries logarithmico-exponentielles" formelles, satisfaisant des propriétés convenables. Avec P. Mardesic et T. Servi nous travaillons donc sur un programme dont la première étape consiste à définir les anneaux de séries formelles adéquats ainsi que les propriétés requises pour le morphisme injectif. Nous souhaitons ainsi aboutir à un théorème de "monomialisation" des éléments de nos algèbres à l'aide d'une notion convenable d'éclatements, pour en déduire un résultat d'o-minimalité. Si ce programme aboutit, nous envisageons de prolonger les résultats de [5] aux polycyles hyperboliques éventuellement résonants.

c) Dans les approches précédentes, les méthodes o-minimales ne servent pas à simplifier ou éclairer les preuves de la conjecture de Dulac. C'est plutôt l'inverse qui se produit: dans les cas particuliers bien compris (*i.e.* le cas hyperbolique non résonant), les preuves de Dulac *s'étendent* en des preuves de o-minimalité. J'envisage maintenant une autre approche. Il s'agit de montrer que les points singuliers hyperboliques non dégénérés des champs de vecteurs analytiques admettent des difféomorphismes normalisants réels quasianalytiques, et donc définissables dans une structure o-minimale. Si c'est le cas, les applications de Poincaré correspondantes seraient définissables dans la ***clôture pfaffienne*** de cette structure, et hériteraient donc des propriétés de finitude requises. Pour construire de tels difféomorphismes, la méthode que je souhaite développer, et sur laquelle j'ai commencéà travailler avec O. Le Gal et D. Panazzolo, s'appuie sur la notion de ***resommation réelle*** développée par J. Ecalle et F. Menous et étudiée depuis par mon doctorant actuel, E. Vieillard-Baron. Par ce procédé, le difféomorphisme réel serait obtenu en considérant des moyennes pondérées convenables de resommées complexes (à la Borel-Laplace) du difféomorphisme de normalisation formel (voir également le paragraphe suivant consacré à la resommation réelle).

Intégration de fonctions oscillantes exp-analytiques. [3] Dans une prépublication en collaboration avec G. Comte, D. Miller, R. Cluckers, et T. Servi, soumise au Duke Math. Journal, j'étends les résultats d'intégration obtenus précédemment par J.-M. Lion, G. Comte et moi-même [12, 4], puis développés par R. Cluckers et D. Miller. Nous considérons l'algèbre engendrée par les fonctions sous-analytiques, leurs logarithmes et les fonctions $\exp(\mathrm{i}\varphi(x))$, où φ est une fonction sous-analytique en n variables. Nous analysons la nature des intégrales à paramètres des éléments de ces algèbres. A quel prix faut-il enrichir cette algèbre pour obtenir une famille stable par intégration ? Quel est la nature du lieu d'intégrabilité de ces fonctions ? L'une des motivations pour ce type question est la description et l'étude asymptotique des "intégrales oscillantes du second ordre" et des "opérateurs intégraux de Fourier". Par exemple la fonction "sinus intégral" appartient à la classe que nous introduisons. Nous montrons que la réponse à ces questions s'obtient en introduisant des fonctions "transcendantes", qui sont des intégrales de "monômes" du type produit de fonction sous-analytiques, d'une puissance entière du logarithme, et de l'exponentielle. L'un des arguments techniques employés est le "théorème de préparation des fonctions sous-analytiques", démontré par J.-M. Lion et moi-même dans notre approche analytique du théorème de Wilkie sur la modèle complétude de l'exponentielle [10]. Un autre outil essentiel de cette étude asymptotique est la théorie des fonctions "presque periodiques". Enfin, nous montrons que la classe de fonction ainsi obtenue est stable par transformée de Fourier, et même par transformée de Fourier-Plancherel (pour les fonctions de classe L^2.

Il est intéressant de noter que la classe ci-dessus, bien qu'engendrée par des fonctions "oscillantes", contient certaines exponentielles réelles, plates à l'infini. Notre propos est maintenant d'étudier la possibilité d'un théorème analogue, pour des classes de fonctions engendrées par des intégralles d'exponentielles de fonctions analytiques. L'une des motivations de ce nouveau projet est l'étude de certaines *périodes*, au sens de Konsevitch.

Intégrales oscillantes et dimension fractale. Une longue série de résultats, basés sur des techniques d'analyse fractale, permet une lecture métrique de certaine propriétés plus "algébriques", comme, par exemple, celle de multiplicité. C'est par exemple le cas dans l'étude qualitative des champs de vecteurs, où il est parfois possible d'analyser la multiplicité de cycles limites d'un champ de vecteurs du plan à l'aide de la dimension de Minkovski des trajectoires qui s'accumulent sur ce cycle.

On peut aborder dans le même esprit l'étude des intégrales oscillantes. Le lien entre ces intégrales et la résolution des singularités est connue de longue date. On peut en particulier "lire" leur développement asymptotique à partir de l'information qu'on tire de la résolution des singularités d'une phase analytique. Or le graphe d'une telle intégrale peut être vu, en séparant parties réelle et imaginaire, comme une courbe "spiralante". Cet objet permet de considérer une approche métrique. Dans le preprint [27] co-écrit avec avec D. Vlah et V. Županović, nous montrons comment interpréter certains termes du développement asymptotique de telles intégrales à l'aide de la dimension et du "content" de Minkovski de cette courbe.

Nous projetons d'étendre ces méthodes à d'autres intégrales, dont la phase appartient une classe de fonctions relevant de techniques de résolution des singularités.

Resommation réelle et o-minimalité. Il est notoire que les méthodes sommatoires de Borel-Laplace produisent, même lorsque le problème d'origine est réel, des solutions complexes. L'exemple le plus simple d'une telle situation est l'équation différentielle d'Euler $x^2y' = y - x$. Elle admet la solution formelle divergente $\hat{y}(x) = \sum_{n\geq 0} n!x^{n+1}$. Or les diverses resommées de cette série par la méthode de Borel-Laplace sont des fonctions qui prennent des valeurs complexes sur l'axe réel positif. Par conséquent, aucune solution réelle de l'équation d'Euler sur l'axe réel positif n'est obtenue par cette méthode sommatoire.

Cette limitation a conduit il y a quelques années J. Ecalle, puis F. Menous, à développer une notion de *resommation réelle*. Elle consiste essentiellement, en partant d'une série formelle $\hat{y}(x)$ à coefficients réels solution d'un problème réel, à compléter la méthode usuelle de Borel-Laplace par une moyenne convenable des divers prolongements analytiques de la transformée de Borel de $\hat{y}(x)$. Une description du type de moyenne employé, en termes d'algèbres de Hopf, a été achevée récemment par mon élève E. Vieillard-Baron. Toutefois, beaucoup reste à faire. Tout d'abord, le procédé décrit dans les textes existants ne concerne que les séries 1-sommables, et il convient de le généraliser aux séries accéléro-sommables. Ensuite, il serait utile de l'étendre en un morphisme d'algèbre, afin de montrer que les fonctions réelles obtenues appartiennent à des algèbres quasianalytiques. Je pense pour cela m'appuyer entre entre autres sur des résultats récents de David Sauzin sur les algèbres fonctions résurgentes, montrant leur stabilité par des opérations comme composition, fonctions implicites,.... L'objectif est de montrer que les germes ainsi construits engendrent un *système quasianalytique*, et d'en déduire l'o-minimalité attendue.

Théorie de l'itération, analyse fractale et transséries. Dans un travail récent en collaboration avec P. Mardešić, M. Resman et V. Županović, j'ai étudié le problème suivant. Considérons un champ de vecteurs analytique du plan réel, et un polycycle monodromique de ce champ, dont les points singuliers sont tous hyperboliques. Désignons par f l'application de premier retour de ce polycycle. Notre propos est de considérer f comme un système dynamique sur un intervalle de l'axe réel, et d'étudier la dimension de Minkovski de ces orbites. Il s'agit en effet de généraliser un résultat antérieur des mes co-auteurs, qui parviennent dans des cas particuliers à lier cette dimension à une notion *ad hoc* de multiplicité de f à l'origine. Ceci permet d'aborder certains aspects du problème de Dulac à l'aide d'outils métriques.

Il est connu que l'application f admet à l'origine un développement asymptoque dont les monômes sont des produits de puissances réelles de la variable et de puissances entières de sont logarithme. Comme il est classique de le faire en dynamique holomorphe, analytique réelle ou en classe $\mathcal{C}^{\infty}$, nous étudions dans notre premier travail [?] la dynamique de f du point de vue formel. Nous résolvons donc pour le développement asymptotique $\hat{f}$ de f les problèmes de mise sous forme normale et de plongement dans un flot différentiable. Il est intéressant de noter que nos résultats, non seulement généralisent les résultats classiques, mais peuvent, notamment dans le cas d'une application parabolique, les simplifier. Un autre aspect intéressant de la preuve est qu'il nous oblige à construire la conjugante de $\hat{f}$ vers sa forme normale à l'aide d'une *composition transfinie* de transformations élémentaires. Un autre aspect intéressant est que nous devons, pour obtenir nos résultats, munir l'anneau de transséries que nous considérons de différentes topologies, moins fortes que la topologie de la valuation considérée habituellement.

Nous travaillons actuellement sur la suite de ce premier travail. Il s'agit maintenant d'obtenir la dimension de Minkovski d'une orbite de f à l'aide du développement asymptotique d'une *aire continue* d'un tube de petit rayon autour de cette orbite, et d'établir le lien avec une notion de multiplicité appropriée. L'étude de ce développement asymptotique utilise fortement les résultats de [?]. Dans le preprint [14], nous montrons comment calculer cette aire continue à l'aide d'une *coordonnée de Fatou* de f, dont nous montrons qu'elle admet un développement asymptotique en transséries.

Nous prévoyons dans le futur de considérer d'autre classes de transséries, impliquant des logarithmes itérés et des monômes exponentiels, ce qui va nous amener à étudier les équations d'Abel dans des situations générales.

Elimination des quantificateurs dans la théorie des transséries. Un résultat récent de M. Aschenbrenner, L. van den Dries et J. van der Hoeven énonce que la théorie de transséries, exprimée dans un langage convenable, admet l'élimination des quantificateurs. Il s'agit d'un travail considérable (d'environ 700 pages) de théorie des modèles des corps différentiels valués, dont j'ai entrepris l'étude lors d'un groupe de travail en 2016 avec quelques collègues de Paris 7. J'ai le projet - encore à l'état d'ébauche, aujourd'hui - d'aborder avec mes collègues que cette idée intéresserait, une approche de ce résultat par des méthodes plus géométriques.

Il s'avère que l'élimination des quantificateurs est démontrée à l'aide d'un critère utilisant des extensions de plongements de modèles de la théorie dans un modèle saturé. Or, la première preuve de l'élimination des quantificateurs de la théorie $T_{\text{an}}(\exp)$ dans le langage $L_{\text{an}}(\exp, \log)$ s'appuie sur un critère analogue. Dans les deux cas, il s'agit de comprendre comment étendre un plongement donné lorsqu'on adjoint un élément, en fonction des propriétés valuatives de cet élément. Or, avec J.-M. Lion dans l'article [10], j'ai traduit cette étude valuative dans le cas de $T_{\text{an}}(\exp)$ en un *théorème de préparation des fonctions log-exp-analytiques.* Le principe de ce résultat est qu'afin d'aboutir à l'élimination des quantificateurs, il ne suffit pas de résoudre les équations de cette classe par rapport à une variable donnée. Il faut également les "préparer", c'est à dire les *monomialiser* convenablement.

Mon idée – je le répète très embryonnaire – est qu'il est possible d'obtenir un résultat analogue pour les polynômes différentiels à coefficients transséries.

13 Liste de publications et prépublications

References

[1] F. Blais, R. Moussu, and J.-P. Rolin, *Non-oscillating integral curves and o-minimal structures*, Analyzable Functions and Applications (M. D. Kruskal O. Costin and A. Macintyre, eds.), Contemporary mathematics series, vol. 373, American Mathematical Society, 2005.

[2] F. Cano, R. Moussu, and J.-P. Rolin, *Non-oscillating integral curves and valuations*, J. Reine Angew. Math. **582** (2005), 107–141.

[3] R. Cluckers, G. Comte, D. Miller, J.-P. Rolin, and S. Servi, *Integration of oscillatory and subanalytic functions*, arXiv:1601.01850, Jan 2016.

[4] G. Comte, J.-M. Lion, and J.-P. Rolin, *Nature log-analytique du volume des sous-analytiques*, Illinois J. Math. **44** (2000), no. 4, 884–888.

[5] T. Kaiser, J.-P. Rolin, and P. Speissegger, *Transition maps at non-resonant hyperbolic singularities are o-minimal*, J. Reine Angew. Math. **636** (2009), 1–45.

[6] O. Le Gal and J.-P. Rolin, *An o-minimal structure which does not admit $\mathcal{C}^\infty$ cellular decomposition*, Ann. Inst. Fourier **59,** (2009), no. 2, 543–562.

[7] J.-M. Lion, C. A. Roche, and J.-P. Rolin, *Variétés de Rolle de formes algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), no. 3, 287–290.

[8] J.-M. Lion and J.-P. Rolin, *Homologie des ensembles semi-pfaffiens*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **46** (1996), no. 3, 723–741.

[9] ———, *Théorème de Gabrielov et fonctions log-exp-algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), no. 9, 1027–1030.

[10] ———, *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **47** (1997), no. 3, 859–884.

[11] J.-M. Lion and J.-P. Rolin, *Frontière d'une hypersurface pfaffienne et géométrie sous-analytique*, Singularities Symposium—Łojasiewicz 70 (Kraków, 1996; Warsaw, 1996), Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998, pp. 167–172.

[12] ———, *Intégration des fonctions sous-analytiques et volumes des sous-ensembles sous-analytiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 3, 755–767.

[13] ———, *Volumes, feuilles de Rolle de feuilletages analytiques et théorème de Wilkie*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **7** (1998), no. 1, 93–112.

[14] P. Mardešić, M. Resman, J.-P. Rolin, and V. Županović, *Length of epsilon-neighborhoods of orbits of dulac maps*, arXiv:1606.02581.

[15] ———, *Normal forms and embeddings for power-log transseries*, Adv. Math. **303** (2016), 888–953.

[16] M. Matusinski and J.-P. Rolin, *Generalised power series solutions of sub-analytic differential equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006), no. 2, 99–102.

[17] C. Miller, J.-P. Rolin, and P. Speissegger (eds.), *Lecture notes on o-minimal structures and real analytic geometry*, Fields Institute Communications, vol. 62, Springer, New York, 2012.

[18] R. Moussu and J.-P. Rolin, *Une preuve combinatoire du théorème de Frobenius*, Astérisque (2009), no. 323, 253–260.

[19] A. Parusiński and J. P. Rolin, *Note on the Weierstrass preparation theorem in quasianalytic local rings*, Canad. Math. Bull. **Online** (2013).

[20] J. P. Rolin, *A survey on o-minimal structures*, To appear in collection "Panoramas et Synthèses", S.M.F.

[21] J.-P. Rolin, *Fonctions logarithmico-exponentielles et théorie des modèles des corps valués*, Rev. Semin. Iberoam. Mat. Singul. Tordesillas **3** (2003), no. 2, 47–55.

[22] ———, *Establishing the o-minimality for expansions of the real field*, Model theory with Applications to Algebra and Analysis (vol. 1), London Math Soc. Lecture Note Series, no. 359, Cambridge Univ Press, 2008.

[23] ———, *Construction of o-minimal structures from quasianalytic classes*, Lecture notes on O-minimal structures and real analytic geometry, Fields Inst. Commun., vol. 62, Springer, New York, 2012, pp. 71–109.

[24] J.-P. Rolin, F. Sanz, and R. Schäfke, *Quasi-analytic solutions of analytic ordinary differential equations and o-minimal structures*, Proc. London Math. Soc. **95** (2007), no. 2, 413–442.

[25] J.-P. Rolin and T. Servi, *Quantifier elimination and rectilinearization theorem for generalized quasianalytic algebras*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **110** (2015), no. 5, 1207–1247.

[26] J.-P. Rolin, P. Speissegger, and A. J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 4, 751–777.

[27] J. P. Rolin, D. Vlah, and V. Županović, *Oscillatory integrals and fractal dimension*, arXiv:1609.00976.

[28] R. Martín Villaverde, J.-P. Rolin, and F. Sanz Sánchez, *Local monomialization of generalized analytic functions*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **107** (2013), no. 1, 189–211.